le : 27 mars 2020

La distribution des puissances d'un nombre dans une base de numération

SABIR ILYASS

L'exercice proposé ici est difficile , on va aborder quelques lemmes pour faciliter la résolution de l'exercice ,les deux premiers lemmes sont classiques ·

La notion d'équipartition d'une suite de réels est utilisée dans le lemme 1 , on va montrer précisément le résultat connu sous le nom de critère de Weyl .

On suppose que le lecteur connu déjà quelques notions de base concernant la théorie des groupes ,la définition d'une suite de réels équiripartie sur $[0,\ 1]$ et l'axiome de la borne inférieure ,la caractérisation de la borne inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$,la topologie sur un espace vectoriel normé ,les suites de fonctions ,la continuité uniforme ... (voir aussi l'Annexe) .

Exercice 1.

Soient $a, b \geq 2$ deux entiers tel que a est non divisible par b

Notons $\Omega = \left\{a^k/k \in \mathbb{N}^*\right\}$,on considère l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$, où p est la probabilité

$$p\colon I \in \mathcal{P}(\Omega) \to \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{card}(I \bigcap\ \Omega_n)}{n} \in [0,1] \quad \text{où } \Omega_n = \left\{a^k/k \in [\![1,n]\!]\right\}$$

soit X v.a.r définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ par X: $x \in \Omega \to$ le premier chiffre de l'écriture de x dans la base b

Calculer $p(X=i)$ pour tout $i \in [\![1, b-1]\!]$, commenter

Solution.

On garde les mêmes notations de l'énoncé ,on fixe a et b ,on note $\forall i \in [\![1, b-1]\!]$,$\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $N_i(n)$ le nombre d'éléments de l'ensemble $\Omega_n = \left\{a^k/k \in [\![1,n]\!]\right\}$ dont le premier chiffre en base b est i .

Le lecteur pourra vérifier facilement que p est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$,et que X est un v.a.r sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$

Remarquons tout d'abord qu'il existent deux entiers non nuls $(k, c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^\star$ tel que $a = c.b^k$ avec b ne divise pas c. [(1)] ,puisque a n'est pas une puissance de b alors $c \geq 2$,le premier chiffre des puissances de a dans la base b est le même que celui de c ,donc on pourra supposer dans la suite sans perte de généralité que b ne divise pas a .

Avant de commencer on montre premièrement 2 lemmes essentielles utiliséent aprés au cours de la démonstration.

---

(1) : $k = \max\{j \in \mathbb{N}, b^j \text{ divise } a\}$,$k$ existe puisque $\{j \in \mathbb{N}, b^j \text{ divise } a\}$ est une partie de $\mathbb{N}$ non vide car contient 0 et majorée .

Lemme 1. *(critère de Weyl):*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite de $[0,1]$, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est équirépartie

(ii) pour toute fonction $f;[0,1]\to\mathbb{R}$ continue , on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f(a_k)=\int\limits_0^1 f(t)\mathrm{dt}$

(iii)pour tout $p\in\mathbb{N}^\star$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} e^{2i\pi \mathrm{p} a_k}=0$

PREUVE :Notons $\forall 0\leq a\leq b\leq 1\ X_n(a,b)=\mathrm{Card}\{k\in[\![1,n]\!], a_k\in[a,b]\}$

Montrons que $(i)\Rightarrow$ (ii),on a $\forall 0\leq a\leq b\leq 1\ \ \frac{X_n(a,b)}{n}=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\chi_{[a,b]}(a_k)$,où $\chi_{[a,b]}$ désigne la fonction caractéristique du segment $[a,b]$, et que

$\int\limits_a^b \chi_{[a,b]}(x)dx=b-a$, la propriété (ii) est donc vérifiée pour les fonctions caractéristiques d'un segment ,or tout fonction f en escalier sur $[0,1]$ est combinaison linéaire de fonctions caractéristiques de segments (éventuellement réduits à un point pour obtenir les valeurs de f aux points de sicontiuité). Par linéarité , la propriété (ii) est alors vraie pour toute fonction en escalier ,Montrons maintenant que (ii) est verifiée pour toute fonction continues , soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction continue et $\varepsilon>0$, On sait qu'on peut trouver une fonction en escalier g qui approche f uniformément ù ε près sur $[0,1]$,i.e telle que $\|f-g\|_\infty\leq\varepsilon$,Grâce a l'inégalité triangulaire ,pour tout $n\geq 1$,on peut majorer $\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f(a_k)-\int\limits_0^1 f(x)dx\right|$ par :

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(f(a_k)-g(a_k))\right|+\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(a_k)-\int_0^1 g(x)dx\right|+\left|\int_0^1 g(x)dx-\int_0^1 f(x)dx\right|$$

avec : $\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(f(a_k)-g(a_k))\right|\leq\varepsilon$, $\left|\int\limits_0^1 g(x)dx-\int\limits_0^1 f(x)dx\right|\leq\varepsilon$,pour le deuxième terme ,comme la fonction g est en escalier , ce terme devient inférieur à ε a partir d'un certain rang N ,Bref , pour tout entier $n\geq N$ $\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f(a_k)-\int\limits_0^1 f(x)dx\right|\leq 3\varepsilon$ ce qui prouve (ii).

Montrons réciproquement que (ii) $\Rightarrow(i)$,Une fonction caractéristique d'un segment I (distinct de $[0,1]$) présente au moins une discontinuité ,donc ne peut pas être obtenue comme linite uniforme d'une suite de fonctions continues ,En fait on n'a pas besoin d'une approximation uniforme : il va suffire d'encadrer χ_I par deux suites de fonctions continues affines par morceaux qui convergent vers χ_I

au sens de la norme intégrale ,Prenons pour commencer un segment $I=[\alpha,\beta]$ avec $0<\alpha<\beta<1$,On considére les suites de fonctions continues définient par :

$\forall k\in\mathbb{N}^\star$suffisamment grand φ_k est nulle sur les segments $[0,\alpha]$ et $[\beta,1]$ et vaut 1 sur le segment $\left[\alpha+\frac{1}{k},\beta-\frac{1}{k}\right]$ et affine sur les deux segments qui restent , et ψ_k est nulle sur les segments

$\left[0,\alpha-\frac{1}{k}\right]$ et $\left[\beta+\frac{1}{k},1\right]$ et vaut 1 sur le segment $\left[\alpha-\frac{1}{k},\beta+\frac{1}{k}\right]$ et affine sur les deux segments qui restent

On observe que pour tout p assez grand ; $\varphi_p\leq\chi_I\leq\psi_p$,il en résulte que pour tout n assez grand $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\varphi_p(a_k)\leq\frac{X_n(\alpha,\beta)}{n}\leq\sum\limits_{k=1}^{n}\psi_p(a_k)$ par hypothèse :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi_p(a_k)==\int_0^1\varphi_p(x)dx=\beta-\alpha-\frac{1}{p}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\psi_p(a_k)==\int_0^1\psi_p(x)dx=\beta-\alpha+\frac{1}{p}$$

Soit $\varepsilon>0$, Choisissons p tel que $\frac{1}{p}<\varepsilon$,il existe N tel que pour $n\geq N\left|\frac{X_n(\alpha,\beta)}{n}-(\beta-\alpha)\right|\leq 2\varepsilon$,ainsi : $\left(\frac{X_n(\alpha,\beta)}{n}\right)_{n\geq1}$ converge vers $\beta-\alpha$,lorsque $0<\alpha<\beta<1$,il est aisé d'adapter cela lorsque $\alpha=0$ ou $\beta=1$

(iii) $\Rightarrow(i)$ résulte directement de (ii) puisque

$$\forall p\in\mathbb{N}^\star\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{2i\pi pa_k}=\int_0^1\cos(2\pi px)+i\int_0^1\sin(2\pi px)=0$$

Montrons enfin que (iii) $\Rightarrow$ (ii),Par linéarité, on a la propriété (ii) pour tout polynômes trigonométriques du type

$$x\to c_0+\sum_{k=1}^{n}(c_k\cos(2k\pi x)+d_k\sin(2k\pi x))$$

D'après le théorème de Weistrass trigonométrique , toute fonction continue $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ vérifiant $f(0)=f(1)$ est limite uuniforme d'une suite de polynômes trigonométriques de ce type ,Comme précédemment ,on en déduit que (ii) est vérifiée pour une telle fonction continue g vérifiant $g(0)=g(1)$ et $\int_0^1|f(x)-g(x)|dx\leq\varepsilon$,comme dans l'implication (ii) $\Rightarrow(i)$,cela suffit pour prouver que (ii) est aussi vraie pour f

d'où les propositions (i) ,(ii) et (iii) sont toutes équivalentes

Lemme 2.

Soit $\theta>0$,alors la suite $(n.\theta)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est équirépartie modulo 1 si et seulement si $\theta\notin\mathbb{Q}$

PREUVE : Par définition d'une suite équirépartie modulo 1 (voir l'Annexe) ,on a la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}=(n.\theta)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est équirépartie modulo 1 si et seulement si la suite $(a_n-E(a_n))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est équirépartie ,comme les fonctions $\varphi_k:x\to e^{2\mathrm{i}k\pi x}$ sont tous 1-périodiques pour tout entier non nul k ,alors on a encore l'équivalence $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}=(n.\theta)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est équirépartie modulo 1 si et seulement si $\forall k\in\mathbb{N}^\star,\ \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\varphi_k(a_j)=0$

∘Supposons que $\theta\notin\mathbb{Q}$,on a donc $\varphi_k(\theta)\neq 1$, parsuite pour tout entiers k,n non nuls :

$\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\varphi_k(a_j)=\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\varphi_k(j.\theta)=\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\varphi_k(\theta)^j=\frac{\varphi_k(\theta)}{n}.\frac{\varphi_k(\theta)^n-1}{\varphi_k(\theta)-1}=\frac{\varphi_k(\theta)}{n}.\frac{\varphi_k(n\theta)-1}{\varphi_k(\theta)-1}$,comme $\forall k,\ n\in\mathbb{N}^\star$

$$\left|\frac{\varphi_k(\theta)}{n}.\frac{\varphi_k(n\theta)-1}{\varphi_k(\theta)-1}\right|\leq\left|\frac{2\varphi_k(\theta)}{n(\varphi_k(\theta)-1)}\right|\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

non nul k ,alors on a encore l'équivalence $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}=(n.\theta)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est équirépartie modulo 1 si et seulement si $\forall k\in\mathbb{N}^\star,\ \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\varphi_k(a_j)=0$

alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}=(n.\theta)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est équirépartie modulo 1

∘Supposons que $\theta\in\mathbb{Q}$,alors $\exists(a,b)\in\mathbb{N}^\star\times\mathbb{N}^\star$ tel que $\theta=\frac{a}{b}$,on pose $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}=(a_n-E(a_n))_{n\in\mathbb{N}^\star}$, on a

$\forall n,q\in\mathbb{N}^\star x_{n+b}=(n+b).\theta-E\big((n+b)\frac{a}{b}\big)=n.\theta-E\big(n.\frac{a}{b}\big)=x_n$, donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$est b-périodique , on pose $r=\min\limits_{i=0}^{b-1}(x_i)\leq 1$, donc il n'existe aucun élément de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ dans $]0,r[$,donc le suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ n'est pas équirépartie ,d'où l'équivalence

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Revenons à la question de l'exercice ,soient $i\in[\![1,b-1]\!]$ et $k\in\mathbb{N}^\star$,commencons par traduire le fait que i est le premier chiffre de a^k en base b.

Dans tout la suite en travaille dans la base de numération b

L'entier a^k commence par i si et seulement s'il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $i.b^n\leq a^k<(i+1).b^n$ c'est-à-dire ,si et seulement s'il existe un entier n tel que $\frac{\ln i}{\ln b}+n\leq k\frac{\ln a}{\ln b}<\frac{\ln(i+1)}{\ln b}+k$

ela se traduit encore par : l'entier a^k commence par i si et seulement s'il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que le résidu modulo 1 de $k\frac{\ln a}{\ln b}$ est dans l'intervalle $\left[\frac{\ln i}{\ln b},\frac{\ln(i+1)}{\ln b}\right[$, on pose $\theta=\frac{\ln a}{\ln b}$,on a alors pour tout entier p non nul $N_i(p)$ est exactement le nombre d'entiers $k\in[\![1,p]\!]$ tel que $k.\theta$ modulo 1 appartienne à $\left[\frac{\ln i}{\ln b},\frac{\ln(i+1)}{\ln b}\right[$

Puisque b ne divise pas a alors , $\theta=\frac{\ln a}{\ln b}\notin\mathbb{Q}$,En effet, si ce n'est pas le cas on aurra l'existence de couple $(u,v)\in\mathbb{N}^\star\times\mathbb{N}^\star$ tel que $\frac{\ln a}{\ln b}=\frac{u}{v}$ et $u\wedge v=1$,alors $a^v=b^u$.

Le théorème de bézout assure l'existence d'un couple $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $x.v+y.u=1$

On a alors $a.a^{-y.u}=a^{v.x}=b^{u.x}$,soit p un nombre premier divise a alors il divise b.

on note $n_0 = \max\{j \in \mathbb{N}, u^j \,\text{divise}\, v_p(a)\}$ (2), on a $v_p(a) - y.u.v_p(a) = u.x.v_p(b)$

donc $v_p(a) = u.(y.v_p(a) + x.v_p(b))$.(1)

Comme les solutions de l'équation (E): $x.v + y.u = 1$ (pour (u, v) fixé) est l'ensemble :

$\{(x_0 + k.v,\, y_0 - k.u)/k \in \mathbb{Z}\}$,Et la relation (1) reste vraie pour tout (x, y) solution de (E) on en déduit :

$\forall k \in \mathbb{Z}\, v_p(a) = u.(y_0.v_p(a) + x_0.v_p(b) + k(v.v_p(b) - u.v_p(a)))$ donc forcément $v.v_p(b) = u.v_p(a)$

Comme u^{j_0} divise $v_p(a)$ alors u^{j_0} divise $v.v_p(b)$ avec $u \wedge v = 1$ alors $u^{j_0} \wedge v = 1$,d'après le lemme de Gauss u^{j_0} divise $v_p(b)$ ainsi u^{j_0} divise $y.v_p(a) + x.v_p(b)$, parsuite u^{j_0+1} divise $v_p(a)$,ce qui contredit le caractère minimale de j_0 .

D'aprés le lemme 2 ,on a donc la suite $(k.\theta)_{k\in\mathbb{N}}$ est équirépartie modulo 1 ,c'est-à-dire

$$\boxed{p(X = i) =: \lim_{n\to+\infty} \frac{N_i(n)}{n} = \frac{\ln(i+1) - \ln(i)}{\ln b}}$$

REMARQUES ET COMMENTAIRES :

1) On remarque tout d'abord que l'expression de $p(X = i)$ est indépendant de a ,c'est-à-dire dans n'importe quelle base b , la répartitions des puissances des nombres entiers non divisibles par b ont les mêmes fréquences d'apparition des chiffres en première position .

2) La probabilité décroit en fonction de i ,donc l'apparition de nombre 1 en premier chiffre est le plus fréquent , en effet dans la base 10 ,la fréquence d'apparition de 1 en premier position dans la suite des puissances d'un nombre non divisible par 10 est approximativement 30,1% ,on donne ci-dessous un tableau qui donne la probabilité d'apparition des chiffres 1,2,...,9 dans les puissance d'un entier non divisible par 10 en base décimale :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p(X=i)	30,1%	17.6%	12,46%	9,69%	7,91%	6,69%	5,79%	5,11%	4,57%

on donne en plus les figures 2 et 3 qui représentent respectivement les courbes des fonctions $x \to \frac{\ln(x+1) - \ln(x)}{\ln(10)}$ et $(x, y) \to \frac{\ln(x+1) - \ln(x)}{\ln(y)}$

(2) : n_0 existe ,puisque $\{j \in \mathbb{N}, u^j \,\text{divise}\, v_p(a)\}$est une partie de $\mathbb{N}$ non vide car contient 0 et majorée .

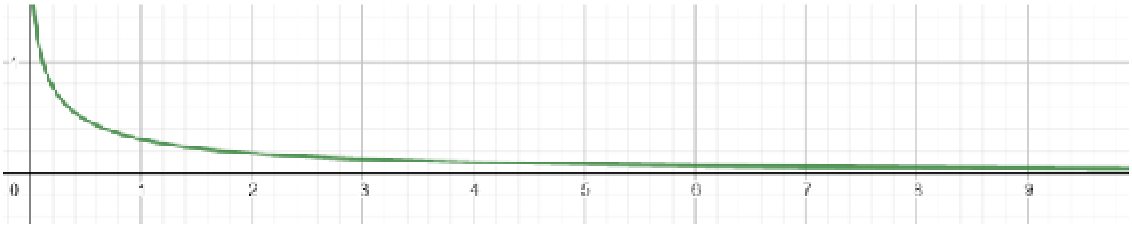

figure 1

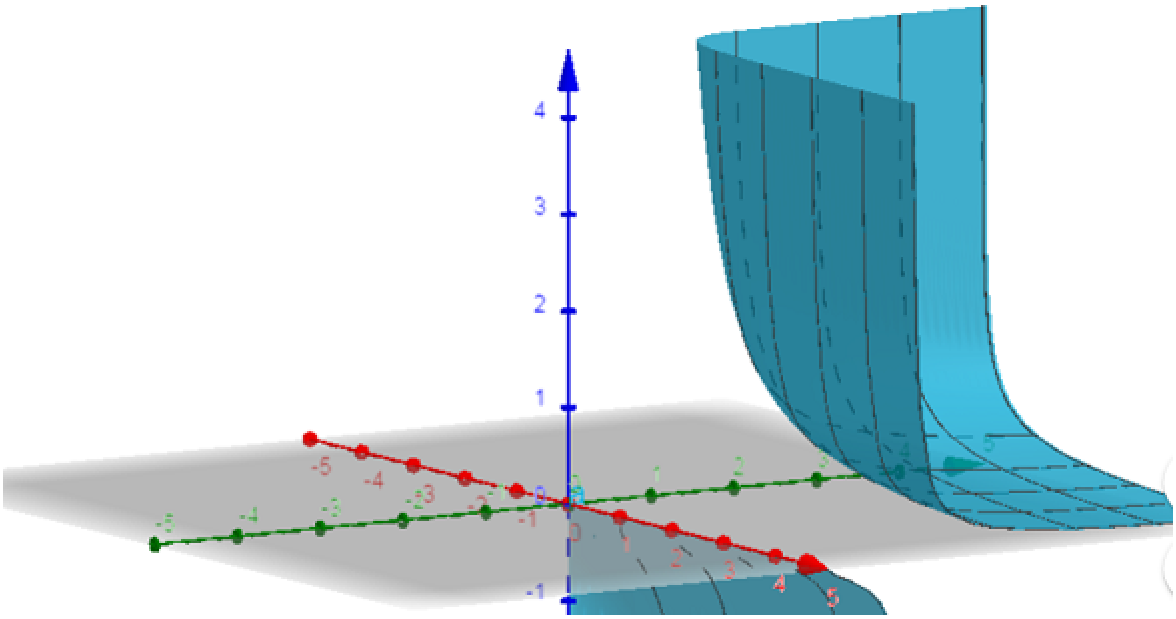

figure 2

3)Remarquons aussi que $\forall i \in [\![1, b-1]\!] : p(X=i) =: \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{N_i(n)}{n} = \frac{\ln(i+1) - \ln(i)}{\ln b} > 0$, alors pour tout $i \in [\![1, b-1]\!]$ il existe une infinité de puissance de a dont le développemnt b-adique commence par i

on donnera une autre preuve de ce résultat indépendament de la résultat démontrer dans l'exercice

fixons $i \in [\![1,\ b-1]\!]$,pour montrer le résultat il suffit de démontrer qu'il existe une infinité de couple $(n,\ k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $i \leq \frac{a^n}{b^k} < i+1$ est équivalent a trouver une infinité de couple $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $\ln(i) \leq \mathrm{n}\ln(a) - \mathrm{k}\ln(b) < \ln(i+1)$

Le résultat est prouvé grâce a la densité de $\frac{\ln(a)}{\ln(b)}\mathbb{N} + \mathbb{Z}$,car $\frac{\ln(a)}{\ln(b)} \notin \mathbb{Q}$

Les deux courbes des figures 1 et 2 sont tracéent a l'aide du logiciel GeoGebra c'est ça ce qu'on va montrer dans les deux lemmes suivantes :

Lemme 3. *(Sous -groupes additifs de $\mathbb{R}$):*

soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ non réduit à $\{0\}$,Alors G est soit dense dans $\mathbb{R}$, soit de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a>0$

PREUVE : C'est classique ! ,le raisonnement est basé sur la borne inférieure de $\mathbb{R}_+^\star \bigcap G$

Comme G est non réduit à $\{0\}$, alors il existe $x\neq 0$, tel que $x\in G$, vu que G est un groupe alors $-x\in G$,alors $|x|\in G$,ainsi $\mathbb{R}_+^\star\bigcap G\neq\emptyset$,cette partie est minorée par 0 ,donc d'aprés l'axiome de la borne inférieure on a l'existence de $r=\inf \mathbb{R}_+^\star\bigcap G$

$\rightarrow$ si $r>0$, on va montrer que $r\in G$, par l'absurde supposons que a ne soit pas dans G , comme $r>0$ alors d'aprés la caractérisation de la borne inférieure on a $\exists x\in\mathbb{R}_+^\star\bigcap G$ tel que $r<x<2r$,puisque $x-r>0$ on a aussi $\exists y\in\mathbb{R}_+^\star\bigcap G$ tel que $r<y<r+(x-r)=x$,donc on a $r<y<x<2r$

Or $0<x-y<r$,on tire $x-y\in\mathbb{R}_+^\star\bigcap G$ et $x-y<r$,ce qui est absurde ,d'où $r\in G$

Par stabilité de la somme dans G ,$r\mathbb{Z}\subset G$

Réciproquement ,soit $x\in G$, $k=\left[\frac{x}{r}\right]$,comme G est un groupe le réel $x-k.r\in G$,et comme $k\leq\frac{x}{r}<k+1$ alors $0\leq x-\mathrm{kr}<r$,Nécessairement $x-k.r=0$ i.e $x=k.r\in r\mathbb{Z}$

$\rightarrow$ si $r=0$,on va montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$,pour cela soient $a<b$ dans $\mathbb{R}$, comme r=0 ,par la caractérisation de la borne inférieure on a $\exists x\in\mathbb{R}_+^\star\bigcap G$ tel que $0<x<b-a$.

On note $\mathcal{C}_{b,a}=\{k\in\mathbb{N}/kx<b\}$, il est clair que $\mathcal{C}_{b,a}$ est une partie de $\mathbb{N}$ non vide majoréé ,donc admet un plus grand élement noté n_0

Comme l'entier $n_0+1\notin\mathcal{C}_{b,a}$ et $n_0\in\mathcal{C}_{b,a}$,alors $(n_0+1)\,x\geq b$ et $n_0x<b$, par suite $a<b-x\leq n_0\,x<b$

D'où $]a,b[\bigcap G\neq\emptyset$, c-à-d G est dense dans $\mathbb{R}$.le lemme est prouvé.

Lemme 4.

Soit θ un irrationnel alors $\theta\mathbb{N}+\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$

PREUVE :on a $\theta\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$, alors d'après le lemme 1 on a $\theta\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$ soit dense dans $\mathbb{R}$,soit de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a>0$ ($a>0$ car $\theta\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$ est non réduit a $\{0\}$

Si on suppose qu'il existe $a>0$, tel que $\theta\mathbb{Z}+\mathbb{Z}=a\mathbb{Z}$, comme $1,\theta\in\theta\mathbb{Z}+\mathbb{Z}=a\mathbb{Z}$ alors $\exists(u,v)\in\mathbb{N}^\star\times\mathbb{Z}$ tel que $1=u.a$ et $\theta=v.a$,ainsi $\theta=\frac{v}{u}\in\mathbb{Q}$ absurde ! ,donc $\theta\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$

on va montrer que l'ensemble $\theta\mathbb{N}+\mathbb{Z}$ reste encore dense dans $\mathbb{R}$.soient $a<b$ dans $\mathbb{R}$,on a l'existence de $x=n\theta+m\in\theta\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$ tel que $0<x<b-a$

Si n est un entier naturel ,soit m_0 le plus grand entier inférieur strictement à a ,on a la suite $(kx+m_0)_{k\in\mathbb{N}}$ rencontre nécessairement $]a,b[$,puique il s'agit d'une suite arithmétique de raison $x<b-a$,donc il existe dans ce cas un élement de $\theta\mathbb{N}+\mathbb{Z}$ dans $]a,b[$.

Si $m<0$,alors $-x\in\theta\mathbb{N}+\mathbb{Z}$, soit m_0 un entier supérieur strictement à b ,il existe au moins un élément de la suite $(m_0-k.x)_{k\in\mathbb{N}}$ qui appartient à $]a,b[$.

4) Pour un nombre a puissance de b , les puissances de a sont aussi des puissances de b ,alors le premier chiffre des puissances de a est toujours égal à 1 dans la base b.

5)'apparition des autres chiffres est assez difficile a comprendre ces fréquences , notamment dans la base décimale par exemple :le dernier chiffre d'un nombre pair ne peut pas être un entier impair ,de plus la suite qui a pour chaque entier k en lui associé le dernier chiffre est périodique (de période 1 si ce nombre est divisible par 10 , de période 4 si ce nombre est pair non divisible par 10 , (simple a montrer puisque $2^1=1\,,2^2=4,2^3=8,2^4=16,2^5=32$),si le nombre est impair on pourra discuter les cas possibles facilement ...!),en général l'étude de comportement de dernier chiffre dans une base de numération b pourra ce réduit au nombres 0,1,...,$b-1$, mais pour l'avant-dernier chiffre les choses se complique un peu ,toujours dans la base décimale on voit que pour que un nombre soit divisible par 25 il faut et il suffit qu'il se termine par les chiffres :00,25,50 ou 75 ,Or les puissances de 5 ne sont pas divisible par 100 (car 2 ne divise pas tout les puissances de 5),on pourra etudier les variations d'un chiffre dans une puissance d'un nombre connu dans une base bien précis par exemple les variation de chiffre de position 5 a gauche pour les puissances de 7 dans la base décimale (malgré ça l'étude ne sera pas facile),Qu'en est-il de la situation générale dans une base de numération quelconque ?

6)la probabilité donnée a l'exercice est caractéristique de la fréquence de la distribution des puissances jusqu'à l'infini ,en fait on ne peut pas trouver une partie finie non vide I de $\mathbb{N}$, et un entier $i\in[\![1,b-1]\!]$, tel que

$\frac{\mathrm{Card}(\{k\in I\,/\,i \text{ est le premier chiffre de } a^k \text{dans la base } b\ \})}{\mathrm{card}(I)}=p(X=i)=\frac{\ln(i+1)-\ln(i)}{\ln(b)}$,car sinon , on aurra

$\frac{\ln(i+1)-\ln(i)}{\ln(b)}\in\mathbb{Q}$ donc $\exists(u,v)\in(\mathbb{N}^\star)^2$ tel que $(i+1)^u=i^u.b^v$ comme $i\wedge(i+1)=1$ alors $b/i+1$

donc forcément $i=b-1$, $(b-1)^v=b^{u-v}$ absurde !

7)Pour terminer on donne trois fonctions écrite en Langage Python ,la première renvoie le premier chiffre d'un nombre donné a en une base b , la deuxième fonction prend en paramètre quatre variable a: un nombre entier supérieur ou égal a 2 , b: la base choisie ,n c'est le nombre des puissances , i un entier entre 1 et b-1 est renvoie les premiers n puissances de a qui commencent par i dans la base b dans une liste, la dernière fonction est tout simplement la taille de la liste qu'on trouve a l'aide de la fonction précédente c'est-à-dire le nombre de n premier puissances de a qui commencent par i dans la base b .

```python
def premier_chiffre(a,b):
    j=0
    while a/(b**j) >1:
        j=j+1
    j=j-1
    d=0
    while a-d*(b**j)>=0:
        d=d+1
    if d-1==b:
        return 1
    else:
        return d-1
```

```
def puiss(a,b,n,i):
    L=[]
    for j in range(1,n+1):
        if premier_chiffre(a**j,b)==i:
            L.append(a**j)
    return L
def le_nbr_puiss(a,b,n,i):
    return len(puiss(a,b,n,i))
```

ANNEXE

Définition *(suite équiripartie)*

une suite de réels du segment $[0,1]$ est dite équiripartie si pour tout intervalle I inclus dans $[0,1]$, la probabilité pour un terme de la suite d'être dans I est égale à la longueur de I

Autrement dit : pour une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ du segment $[0,\ 1]$, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite équiripartie si pour tout $0\leq a<b\leq 1$ $\lim\limits_{n\to+\infty}$ $\mathrm{Card}\{k\in[\![1,n]\!]\,,a_k\in[a,b]\}\underset{n\to+\infty}{\to}b-a$

Définition *(suite équiripartie modulo 1)*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uns suite réelle.

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite équiripartie modulo 1 si la suite $(a_n-E(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est équiripartie.